Koncentrationer i et regnvandsbassin

Hvilke koncentrationer, vi har af forskellige partikler i et regnvandsbassin, er et problem, som vi ofte kalder et typisk blandingsproblem. Partikler og vand løber ind i bassinet med en vis hastighed, bliver blandet med det, der allerede er i bassinet og løber ud af bassinet med en vis hastighed. Vi antager i modellen, at partiklerne, der løber ind i bassinet, bliver perfekt blandet med indholdet i bassinet. Vi vil opskrive en differentialligningsmodel, der beskriver situationen og løse differentialligningen.

Den uafhængige variabel må være tiden, t. For ikke at gøre det for kompliceret, vil vi udtrykke stofmængden af partiklerne i bassinet.

$$\frac{dn}{dt} = hastigheden\ partiklerne\ kommer\ ind - hastigheden\ partiklerne\ løber\ ud$$

Lad koncentrationen af partiklerne i det vand, der kommer ind, være konstant og lig c_{ind}. Så må den stofmængde, der kommer ind pr. tidsenhed, være:

$$n_{ind} = c_{ind} \cdot V_{ind}$$

Hvis V_{ind} er den volumen, der løber ind pr. tidsenhed. Stofmængden, der kommer ind, er konstant, da vi antager, at koncentrationen og indløbsvolumen pr. tidsenhed er konstant.

Lad volumen, der forlader bassinet pr. tidsenhed, være konstant V_{ud} . Lad koncentrationen af partikler i bassinet til et givent tidspunkt være $C(t)$ og lad den volumen, der forlader bassinet til et givent tidspunkt være $V(t)$. Den stofmængde, der forlader bassinet, må så være

$$n_{ud} = V_{ud} \cdot C(t) = V_{ud} \cdot \frac{n(t)}{V(t)}$$

Hvor $n(t)$ er den stofmængde, der er i bassinet til et givent tidspunkt.

Volumen i tanken vil, da vi har antaget, at V_{ind} og V_{ud} er konstante:

$$V(t) = V_{start} + V_{ind} \cdot t - V_{ud} \cdot t = V_{start} + t \cdot (V_{ind} - V_{ud})$$

Så kan vi opskrive differentialligningen:

$$\frac{dn}{dt} = n_{ind} - n_{ud}$$

$$\frac{dn}{dt} = c_{ind} \cdot V_{ind} - V_{ud} \cdot \frac{n(t)}{V_{start} + t \cdot (V_{ind} - V_{ud})}$$

Løsningen til denne differentialligning ser meget kompliceret ud og angives derfor ikke her. Den kan løses i et matematikprogram som f.eks. Maple.

Vi kan også kigge på koncentrationen af partiklerne i regnvandsbassinet. Hvis vi har løsningen til ovenstående differentialligning, har vi stofmængden som funktion af tiden, $n(t)$. Desuden har vi volumen som funktion af tiden, $V(t)$. Alt i alt vil vi altså have:

$$C(t) = \frac{n(t)}{V(t)}$$

Eksempel:

Lad os antage, at vi har et regnvandsbassin med en stor volumen, som har et indløb med en phosphatkoncentration på 0,5 mg/L. Indløbet er 10 L pr. min. Regnvandsbassinet indeholder 100 L rent vand til start, og vandet løber ud af bassinet med en hastighed på 15 L pr. min.

Vi har derfor følgende størrelser:

$c_{ind} = 0{,}5\frac{mg}{L}, V_{ind} = 10\frac{L}{min}, V_{ud} = 15\frac{L}{min}$ og $V_{start} = 100\ L$

Det er klart, at bassinet vil løbe tørt, da $V_{ud} > V_{ind}$. Og det vil ske efter:

$$V(t) = 0$$
$$0 = V_{start} + t \cdot (V_{ind} - V_{ud}) \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{V_{start}}{V_{ud} - V_{ind}}$$

Dvs.

$$t = \frac{100}{15 - 10} = 20$$

Altså efter 20 min.

Differentialligningen opstilles:

$$\frac{dn}{dt} = c_{ind} \cdot V_{ind} - V_{ud} \cdot \frac{n(t)}{V_{start} + t(V_{ind} - V_{ud})}$$

Tal indsættes:

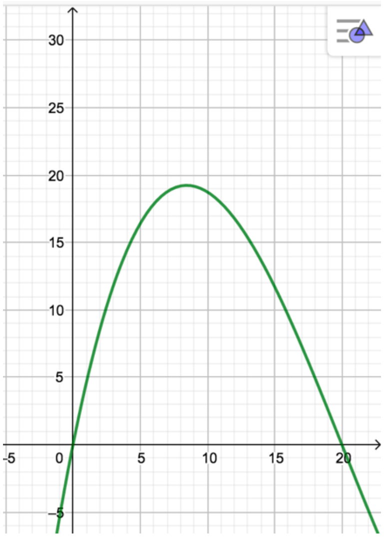
$$\frac{dn}{dt} = 0{,}5 \cdot 10 - 15 \cdot \frac{n(t)}{100 + t(10 - 15)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{dn}{dt} = 5 - \frac{15 \cdot n}{100 - 5 \cdot t}$$

Løsningen til denne differentialligning er, da begyndelsesbetingelsen er $n(0) = 0$:

$$n(t) = 0{,}00625 \cdot t^3 - 0{,}375 \cdot t^2 + 5 \cdot t$$

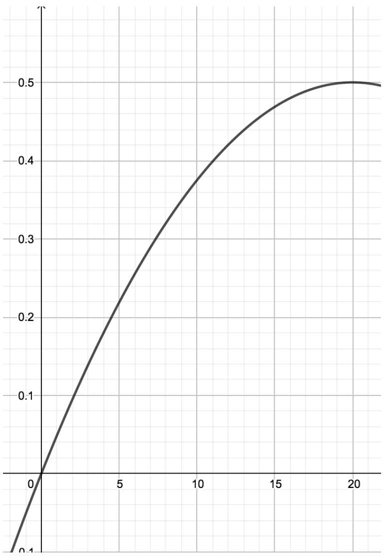
Hvis vi kigger på stofmængden i regnvandsbassinet de første 20 min.:



Det stemmer overens med, at koncentrationen er nul til start, så stiger den pga. indløb af phosphat til en vis mængde, som så må falde, da udløbshastigheden er hurtigere end indløbshastigheden.

Vi kan også kigge på koncentrationen af phosphat i regnvandsbassinet. Den vil være:

$$C(t) = \frac{n(t)}{V(t)} = \frac{0{,}00625 \cdot t^3 - 0{,}375 \cdot t^2 + 5 \cdot t}{V_{start} + t \cdot (V_{ind} - V_{ud})} = \frac{0{,}00625 \cdot t^3 - 0{,}375 \cdot t^2 + 5 \cdot t}{100 + t \cdot (10 - 15)}$$
$$= \frac{5 \cdot t + 0{,}00625 \cdot t^3 - 0{,}375 \cdot t^2}{100 - 5 \cdot t}$$



Det stemmer overens med, at koncentrationen stiger de første 15 min. svarende til, at der løber phosphat ind men næsten intet ud. Når bassinet løber tør, vil koncentrationen svare til koncentrationen i det rene indløb.

Opgave 1

Lad os antage, at vi har et regnvandsbassin med en stor volumen, som har et indløb med en phosphatkoncentration på 0,2 mg/L. Indløbet er 20 L pr. min. Regnvandsbassinet indeholder 200 L rent vand til start, og vandet løber ud af bassinet med en hastighed på 10 L pr. min.

a) Opstil et udtryk for volumen i regnvandsbassinet. Tegn også en graf af volumen som funktion af tiden.
b) Opstil differentialligningen, og løs den. Tegn en graf af løsningen.
c) Beregn koncentrationen af phosphat i regnvandsbassinet og tegn en graf.

Opgave 2

Lad situationen være som i opgave 1. Varier derefter indløbshastigheden med hele tal mellem 1 og 8 L pr. min. Tegn grafer over stofmængder og koncentrationer.